Aufgabe 1: "Large Extra Dimensions" & Planck-Länge

Die Newtonsche Gravitation ist hinreichend, um fundamentale Größen wie die Planck-Länge in diversen Dimensionen zu definieren. Die drei fundamentalen Naturkonstanten G (Newtonsche Gravitationskonstante), c (Lichtgeschwindigkeit) und $\hbar$ (Plancksches Wirkungsquantum) sind in vier Raumzeit-Dimensionen wie folgt bestimmt:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \qquad c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \qquad \hbar = 1.06 \cdot 10^{-34} \frac{kg\ m^2}{s} \tag{1}$$

1. Die Newtonsche Gleichung für das Gravitationspotential $\phi_g^{(D)}$ in D Dimensionen lautet

$$\Delta \phi_g^{(D)} = 4\pi G^{(D)} \rho_m, \tag{2}$$

wobei ρ_m die Massendichte (Masse pro Volumen) beschreibt. Bestimmen Sie, ausgehend von dieser Gleichung, die Einheit/Dimension der D-dimensionalen Gravitationskonstanten $G^{(D)}$ relativ zur Gravitationskonstanten in vier Dimensionen. Beachten Sie, dass das Potential immer dieselbe Dimension hat:

$$[\phi_g^{(D)}] = \frac{[Energie]}{[Masse]} \tag{3}$$

2. Im Planckschen Einheitensystem werden die drei Basiseinheiten *Länge, Zeit* und *Masse* so gewählt, dass die obigen drei fundamentalen Naturkonstanten den Wert eins annehmen, also in $D = 4$:

$$G = 1 \cdot \frac{l_P^3}{m_P\ t_P^2} \qquad c = 1 \cdot \frac{l_P}{t_P} \qquad \hbar = 1 \cdot \frac{m_P\ l_P^2}{t_P} \tag{4}$$

Die Planck'sche Länge ist die eindeutig bestimmte Länge, die sich aus Potenzen von G, c und $\hbar$ bilden lässt, also in $D = 4$:

$$l_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1.61 \cdot 10^{-33} cm \tag{5}$$

Bestimmen Sie in analoger Weise die Planck-Länge in D Dimensionen und drücken Sie diese durch die vierdimensionale Planck-Länge l_P aus. Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil 1 für $G^{(D)}$.

3. Nehmen Sie an, dass die $(D-4)$ Extradimensionen zu einem Torus kompaktifiziert sind. Am Beispiel einer konstanten Massenverteilung auf dem Torus im Ursprung der drei ausgedehnten räumlichen Dimensionen kann man leicht zeigen, dass die vierdimensionale und D-dimensionale Gravitationskonstante wie folgt zusammenhängen, wobei l_c die Länge der kompaktifizierten Dimensionen ist:

$$\frac{G^{(D)}}{G} = V_{extr.} = l_c^{D-4} \tag{6}$$

Bestimmen Sie damit und mit den Ergebnissen aus Teil 1 und 2 die Länge der Extradimensionen l_c für gegebene Planck-Längen l_P und $l_p^{(D)}$. Wie viele Extradimensionen benötigen Sie mindestens, um bei einer Planck-Länge [1] $l_P^{(D)} = 10^{-18} cm$ eine realistische Größe für l_c zu erhalten?

Aufabe 2: Noether-Ladungen

Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung eingeführten Noether-Ladungen

$$P_\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma \dot{X}_\mu \qquad\qquad J_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma X_{[\mu} \dot{X}_{\nu]} \tag{7}$$

für geschlossene Strings erhalten sind. Für welche Randbedingungen sind diese Noether-Ladungen auch bei offenen Strings erhalten? Wie kann man diese Randbedingungen im Bezug auf die Weltflächen-Impulse interpretieren?

Aufgabe 3: Konforme Transformationen

Charakterisieren Sie die Transformationsparameter, welche die konforme Eichfixierung respektieren. Diese Parameter erfüllen die Gleichung

$$\delta_\epsilon h_{\alpha\beta}|_{h=\lambda\eta} = (\delta\lambda)\eta_{\alpha\beta}. \tag{8}$$

Zeigen Sie zuerst, dass diese Transformationen die Beziehung

$$\partial_\alpha \epsilon_\beta + \partial_\beta \epsilon_\alpha = \partial\cdot\epsilon \; \eta_{\alpha\beta} \tag{9}$$

erzwingen. Verifizieren Sie, dass dies in Lichtkegelkoordinaten ($\epsilon^\pm = \epsilon^0 \pm \epsilon^1$) auf die Bedingungen $\partial_+\epsilon^- = 0 = \partial_-\epsilon^+$ führt, also

$$\epsilon^+ = \epsilon^+(\xi^+) \qquad\qquad \epsilon^- = \epsilon^-(\xi^-) \tag{10}$$

[1] Aktuelle Beschleunigerexperimente können Abstände bis zu $10^{-16} cm$ auflösen. Hierbei wurden bisher keine Anzeichen für Extradimensionen gefunden.